# SUITES NUMÉRIQUES

*Définition :* On appelle **suite** une fonction $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

*Définition :* Soit $(a_n)$ une suite

- Si $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ la suite est **croissante**.
- Si $a_n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ et $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ alors ka suite est **croissante**.

## *COVERGENCE DES SUITES*

*Définition* : Soit $(a_n)$ une suite. On dit que **la suite converge vers le nombre *a*** si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \text{ tel que si } n \in \mathbb{N} \text{ avec } n \geq n_0 \text{ alors } |a_n - a| < \varepsilon.$$

On écrit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ou $a_n \to a$.

*La négation de la définition :* la suite $(a_n)$ ne converge pas vers $a$ si

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que : } \forall m \in \mathbb{N} \text{ il existe } n \geq m \text{ t.q. } |a_n - a| \geq \varepsilon.$$

*Théorème :* Si $a_n \to a$ et $a_n \to b \Rightarrow a = b$ (la limite est unique).

*Théorème (des deux gendarmes) :* Soit trois suites $a_n$ , $b_n$, $c_n$ avec

- $a_n \leq b_n \leq c_n \ \forall n \in \mathbb{N}$
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = l$

Alors $(b_n)$ converge vers $l$ aussi : $\lim_{n\to\infty} b = l$

*Définition :* Une suite $(a_n)$ est **bornée** s'il existe $M > 0$ tel que : $|a_n| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$

*Théorème :* **Une suite convergente est bornée**.

! l'opposé n'est pas forcément juste.

*Définition :* Soit une suite $(a_n)$.

i) On dit que $a_n \to +\infty$ si $\forall M > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0 \Rightarrow a_n > M$.

ii) On dit que $a_n \to -\infty$ si $\forall M > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0 \Rightarrow a_n < -M$.

Dans ce cas on dit que la suite **diverge**.

## Operations sur les limites

*Propositions*

- $a_n \to a \Leftrightarrow a_n - a \to 0 \Leftrightarrow |a_n - a| \to 0$.
- $a_n \to 0 \Leftrightarrow |a_n| \to 0$.
- $a_n \to a \Rightarrow |a_n| \to |a|$ !! l'inverse n'est pas toujours vrai pour $a \neq 0$.
- Si $a_n \to a$ et $b_n \to b \Rightarrow a_n + b_n \to a + b$. !! l'inverse n'est pas toujours vrai. C.à.d. que peut être il existe la limite de la somme mais les deux suites ne sont pas forcément convergentes.
- Soit $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites. On suppose que $(b_n)$ est bornée et $a_n \to 0$. Alors $a_n \cdot b_n \to 0$.
- Si $a_n \to a$ et $t \in \mathbb{R} \Rightarrow ta_n \to ta$
- Si $a_n \to a$ et $b_n \to b \Rightarrow a_n \cdot b_n \to ab$
- Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Si $a_n \to a \Rightarrow a_n^k \to a^k$
- Soit $(a_n)$ et $(b_n)$ avec $b_n \neq 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$
- Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Si $a_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ et si $a_n \to a \Rightarrow \sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{a}$
- Si $a_n \leq b_n\ \forall n \in \mathbb{N}$ et $a_n \to a$, $b_n \to b \Rightarrow a \leq b$

## Limites Basiques

*Proposition* :

i) Si $a > 1$ alors la suite $x_n = a^n \to +\infty$

ii) Si $0 < a < 1 \Rightarrow x_n = \sqrt[n]{a} \to 1$

iii) La suite $x_n = \sqrt[n]{n} \to 1$

*Proposition* (*critère de quotient*)

Soit $(a_n)$ avec $a_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

i) Si $a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ et $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l > 1 \Rightarrow a_n \to +\infty$

ii) Si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to l < 1 \Rightarrow a_n \to 0$

Si $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ alors la proposition ne donne pas de résultats. Ex. $\frac{n+1}{n} \to 1$ et $a_n = n \to +\infty$, mais $\frac{1/_{n+1}}{1/_n} \to 1$ et $a_n = \frac{1}{n} \to 0$.

*Proposition :*

i) Soit $\mu > 1$ et $(a_n)$ avec $a_n > 0$. Si $a_{n+1} \geq \mu\, a_n$ $\forall$ n $\in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \to +\infty$

ii) Soit $0 < \mu < 1$ et $(a_n)$ avec $|a_{n+1}| \leq \mu\, |a_n|$ $\forall$ n $\in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \to 0$

*Proposition (critère de racine)*

Soit $(a_n)$ avec $a_n \geq 0$.

i) Si $\sqrt[n]{a_n} \to r < 1 \Rightarrow a_n \to 0$.

ii) Si $\sqrt[n]{a_n} \to r > 1 \Rightarrow a_n \to +\infty$

Si $\sqrt[n]{a_n} \to 1$ alors le critère ne donne pas de résultats. Ex $a_n = n$ on a $\sqrt[n]{n} \to 1$ et $a_n \to +\infty$. Mais pour $a_n = \frac{1}{n}$ on a $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \to 1$ et $a_n \to 0$.

## Convergence des suites monotones

*Théorème :* Si une suite est monotone et bornée alors elle est convergente

- Suites récurrentes

*Exemple*

Soit la suite $(a_n)$ avec $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$ $\forall$ n $\geq 1$. On va montrer que $a_n \to \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

- $a_n > 0$ $\forall$ n $\in \mathbb{N}$
- Si $a_n \to a$ on a $a = \sqrt{1+a} \Rightarrow a^2 = 1 + a \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0$. Donc $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ mais comme la limite, s'il existe, est positive on a $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On va motrer que la limite existe.

- On va montrer que $a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow (a_n) \nearrow$

  $a_2 = \sqrt{2} > a_1 = 1$

  On suppose que $a_{n+1} \geq a_n$ et on a $a_{n+2} = \sqrt{1+a_{n+1}} \geq \sqrt{1+a_n} = a_{n+1}$ . Donc $(a_n) \nearrow$
- On va montrer que $(a_n)$ est majorée.

  $a_1 = 1 < 2$. On suppose $a_n < 2$. Alors $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} < \sqrt{1+2} = \sqrt{3} < 2$.

Donc la suite est bornée est croissante, alors elle converge et $a_n \to \frac{1+\sqrt{5}}{2}$